OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs réelles.

Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. On dit qu'une fonction f définie sur [a,b] est dérivable sur [a,b] si elle est dérivable en tout point de [a,b] et admet en a (resp. en b) une dérivée à droite (resp. à gauche).

On note $E_{a,b}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur [a,b].

Un entier $k \geqslant 1$ est fixé une fois pour toutes.

∴

NOTA : Ce problème comporte quatre parties. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

PARTIE I

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne habituelle une courbe fermée Γ, paramétrée par une application $s \mapsto M(s)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On suppose l'application $s \mapsto M(s)$ de classe C^∞ et périodique de période 1 de sorte que $M(s+1) = M(s)$. On pose $M(s) = (x(s), y(s))$.

On suppose en outre que $\left\|\frac{dM}{ds}\right\| = 1$ et que les vecteurs $\frac{dM}{ds}$ et $\frac{d^2M}{ds^2}$ sont, pour tout s réel, indépendants (la courbe Γ ne présente donc pas de point d'inflexion).

I - 1°) Soit R(s) le rayon de courbure de Γ au point M(s). Montrer que R(s) est fini, quel que soit s.

On notera C(s) le centre de courbure de Γ au point M(s) et D ("développante" de Γ) la courbe décrite par C(s).

A tout point P du plan $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (u,v), on associe la fonction périodique E_P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$E_P(s) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{PM(s)} \right\|^2 .$$

I - 2°) Soit $s_0 \in \mathbb{R}$; montrer les équivalences :

a) $E'_P(s_0) = 0 \iff$ P appartient à la normale à Γ au point $M(s_0)$

b) $E'_P(s_0) = 0$ et $E''_P(s_0) = 0 \iff P = C(s_0)$.

.../...

I - 3°) Soit $s_0 \in \mathbb{R}$ et soit $P = C(s_0)$; montrer les équivalences :

a) $E'''_P(s_0) \neq 0 \iff R'(s_0) \neq 0 \iff$ P est un point régulier de D.

b) $E'''_P(s_0) = 0$ et $E^{(4)}_P(s_0) \neq 0 \iff R'(s_0) = 0$ et $R''(s_0) \neq 0$

$\iff$ P est un point de rebroussement de première espèce de D.

Rappel : $C(s_0)$ est régulier $\iff \frac{dC}{ds}(s_0) \neq 0$; $C(s_0)$ est un point de rebroussement de première espèce si et seulement si $\frac{dC}{ds}(s_0) = 0$ et si les vecteurs $\frac{d^2C}{ds^2}(s_0)$ et $\frac{d^3C}{ds^3}(s_0)$ sont indépendants.

I - 4°) On fait maintenant sur Γ l'hypothèse suivante : $R'(s) = 0 \Longrightarrow R''(s) \neq 0$.
Montrer que D ne possède qu'un nombre fini de points de rebroussements.

PARTIE II

II - 1°) Soit n un entier $\geqslant 0$ et soit t un nombre réel > 0. Montrer que l'intégrale

$$J_n(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}} x^n \, dx$$

est convergente et vaut $n!\, t^{n+1}$. (On pose par convention $0! = 1$).

Soit a un nombre réel > 0. Montrer que :

$$\int_a^\infty e^{-\frac{x}{t}} x^n \, dx \leqslant e^{-\frac{a}{2t}} (2t)^{n+1} n! \, .$$

II - 2°) Soit a un nombre réel > 0 et soit $h \in E_{0,a}$. On définit sur l'intervalle $[0,+\infty[$ une fonction I_1 en posant :

$$I_1(t) = \begin{cases} \int_0^a e^{-\frac{x}{t}} h(x) \, dx & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction I_1 admet un développement limité à l'ordre k au point 0 à droite, de la forme :

$$I_1(t) = a_1 t + \ldots + a_k t^k + t^k \varepsilon(t) \, ,$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quant t tend vers 0. Calculer les coefficients $a_1, \ldots, a_k$ en fonction des valeurs à l'origine de la fonction h et de ses dérivées.

Indication : Considérer d'abord le cas où h est la restriction à $[0,a]$ d'un polynôme puis, pour le cas général, utiliser l'une des formules de Taylor.

b) Montrer, sur un exemple simple, que la fonction $t \rightsquigarrow I_1(t)$ n'est pas en général développable en série entière dans un voisinage de 0.

II - 3°) Soient f et g deux éléments de $E_{a,b}$.

a) On suppose : $f(a) = 0$, $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

.../...

Soit I_2 la fonction définie par :

$$I_2(t) = \begin{cases} \int_a^b e^{-\frac{f(x)}{t}} g(x)\,dx & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction I_2 admet un développement limité à l'ordre k à l'origine de la forme :

$$I_2(t) = b_1 t + \ldots + b_k t^k + t^k \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Montrer : $b_1 = \frac{g(a)}{f'(a)}$. (On ne cherchera pas à calculer les autres coefficients).

b) Montrer que si l'on suppose seulement $f(a) = 0$, f strictement positive sur $]a,b]$ et $f'(a) > 0$, le même résultat est encore valable.

PARTIE III

III - 1°) Soit n un entier $\geqslant 0$ et soit $t > 0$. Montrer que l'intégrale :

$$K_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{t}} x^n\,dx$$

est convergente et que sa valeur est 0 si n est impair, $\sqrt{\pi t}$ si $n = 0$, $(n-1)(n-3)\ldots 1\left(\frac{t}{2}\right)^{n/2}\sqrt{\pi t}$ si n est pair $\geqslant 2$. Supposer connu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\ .$$

III - 2°) Soient a,b deux nombres réels tels que $a < 0 < b$ et soit $h \in E_{a,b}$.

Soit I_3 la fonction définie par :

$$I_3(t) = \begin{cases} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{t}} h(x)\,dx & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer : $I_3(t) = \sqrt{\pi t}\,(c_0 + c_1 t + \ldots + c_k t^k + t^k \varepsilon(t))$

où $c_0, c_1, \ldots, c_k$ sont des constantes et $\varepsilon(t)$ une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers 0. Montrer : $c_0 = h(0)$, $c_1 = \frac{h''(0)}{4}$. (Le calcul des autres coefficients n'est pas demandé).

III - 3°) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < 0 < b$ et soit $f \in E_{a,b}$ une fonction telle que : $f(0) = 0$; $f(x) > 0$ si $x \in [a,b]$ et $x \neq 0$

$f''(0) > 0$.

Soit Φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant b \\ -\sqrt{f(x)} & \text{si } a \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$$

a) Montrer que Φ est continûment dérivable ; préciser $\Phi'(0)$. Nous admettrons le résultat :

$$\Phi \in E_{a,b}\ .$$

Montrer qu'il existe deux réels a' et b' tels que :

$$a \leqslant a' < 0 < b' \leqslant b \quad \text{et} \quad \Phi'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a', b'].$$

Soit $g \in E_{a,b}$; montrer :

$$\int_{a'}^{b'} e^{-\frac{f(x)}{t}}\, g(x)\, dx = \sqrt{\pi t}\,(d_0 + d_1 t + \ldots + d_k t^k + t^k \varepsilon(t)),$$

où $d_0, d_1, \ldots, d_k$ sont des constantes et où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Montrer : $d_0 = g(0)\sqrt{\frac{2}{f''(0)}}$.

b) Soit $g \in E_{a,b}$; nous considérons de nouveau la fonction I_2 définie par :

$$I_2(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b e^{-\frac{f(x)}{t}}\, g(x)\, dx & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

en supposant maintenant $a < 0 < b$; déduire de la question précédente que $I_2(t)$ admet le même développement que l'intégrale $\displaystyle\int_{a'}^{b'} e^{-\frac{f(x)}{t}}\, g(x)\, dx$ au voisinage de 0.

III - 4°) Soit $f \in E_{a,b}$. Soit m la valeur minimale de f. Nous supposerons :

$$f(x) = m \Longrightarrow x \in]a,b[\text{ et } f''(x) > 0.$$

Montrer que f ne prend sa valeur minimale qu'en un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Montrer .

$$I_4(t) = \int_a^b e^{-\frac{f(x)}{t}}\, dx \sim e^{-\frac{m}{t}} \cdot \sqrt{2\pi t} \cdot \sum_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{f''(x_i)}}$$

quand t tend vers 0.

PARTIE IV

Nous revenons aux hypothèses de la partie I et nous considérons pour un point P de $\mathbb{R}^2$ la fonction θ définie par :

$$\theta(P,t) = \frac{1}{2\pi t} \int_0^1 e^{-\frac{\|\overrightarrow{PM}(s)\|^2}{t}}\, ds .$$

Montrer que si P n'est pas confondu avec un point centre de courbure de Γ, il vient :

$$\theta(P,t) \sim \frac{c}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{d(P,\Gamma)^2}{2t}} \text{ , quand t tend vers 0.}$$

. c est une constante ne dépendant que de P et de Γ .

. $d(P,\Gamma) = \inf_{0 \leqslant s \leqslant 1} \|\overrightarrow{PM}(s)\|$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail